

für den projizierten Winkel φ auszuwerten, wobei man nur statt von (B,2) von dem Fourier-Integral der eindimensionalen Gauß-Funktion (C,4) auszugehen hat. Analog zu (D,3) erhält man auf diese Weise:

$$f^{(n)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi} n!} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\eta}{\eta^{n+1}} \left[\log \frac{\eta}{\xi} - i\pi \right]^n \frac{e^{-\frac{\varphi^2}{1+\eta}}}{\sqrt{1+\eta}}. \quad (\text{D, 11})$$

Speziell für $n=1$ ergibt dies weiter:

$$f^{(1)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} \left\{ -\left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right) \Psi(1) + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\sqrt{1-t} e^{t\varphi^2} - 1 - \left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right)t \right] \right\}, \quad (\text{D, 12})$$

was durch partielle Integration noch umgeformt werden kann in

$$f^{(1)}(\varphi) = \Phi'(\varphi) \left\{ \left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right) \left[\log 4\gamma + \int_0^1 \frac{dz}{1-z^2} (e^{(1-z^2)\varphi^2} - 1) \right] + 1 \right\} - 2\varphi \Phi(\varphi). \quad (\text{D, 12'})$$

(Dabei bedeutet $\Phi(\varphi)$ das Fehlerintegral und $\Phi'(\varphi)$ dessen Ableitung.) Die Auswertung von (D,11) für $n=2$ ergibt schließlich:

$$f^{(2)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} \left\{ \left(\frac{\varphi^4}{2} - \frac{3\varphi^2}{2} + \frac{3}{8}\right) [\Psi^2(2) + \Psi'(2)] \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^3} \left[\log \frac{t}{1-t} - \Psi(2) \right] \left[(1-t)^{3/2} e^{t\varphi^2} - 1 - \left(\varphi^2 - \frac{3}{2}\right)t - \left(\frac{\varphi^4}{2} - \frac{3\varphi^2}{2} + \frac{3}{8}\right)t^2 \right] \right\}. \quad (\text{D, 13})$$

Damit sind die $f^{(n)}(0)$ und $f^{(n)}(\varphi)$ für $n=1$ und 2 auf bequeme, für die numerische Berechnung geeignete Integrale zurückgeführt.

Hrn. Prof. Heisenberg bin ich für sein großes Interesse und sehr wertvolle Ratschläge beim Entstehen dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Zur Breit-Wigner-Formel II

VON SIEGFRIED FLÜGGE*

(Z. Naturforschg. 3a, 97–104 [1948]; eingegangen am 8. Dezember 1947)

In Fortsetzung einer früheren Arbeit wird die Breit-Wigner-Formel auf den Fall mehrerer Resonanzniveaus erweitert und gezeigt, daß dabei charakteristische Interferenzerscheinungen zwischen den einzelnen Niveaus auftreten, die der experimentellen Erfassung zugänglich sind. Insbesondere wird der Fall eines engen Dubletts diskutiert und gezeigt, daß hierbei durch Interferenzerscheinungen eine sehr schmale und hohe Linie an Stelle zweier normaler Zustände kommen kann.

Vor einiger Zeit¹ habe ich versucht, eine Herleitung der Formel für den Wirkungsquerschnitt beim Resonanzeinfang langsamer Neutronen an Atomkernen zu geben, die den quantenmechanischen Gepflogenheiten mehr entspricht als die auf das spezielle Problem zugeschnittenen Ableitungen, die sich sonst in der Literatur finden². In der folgenden Mitteilung wird dieser Gedankengang auf den Fall *mehrerer* Resonanzniveaus ausgedehnt. Das physikalische Problem, das dabei im

Mittelpunkt steht, ist folgendes: Wird der Einfangquerschnitt nach der „Ein-Niveau-Formel“ berechnet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{\sigma_r \Gamma^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2}, \quad (1)$$

so erhält man für thermische Energie $E_{th} \ll E_r$ genähert

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E_r}{E_{th}}} \left(\frac{\Gamma}{E_r} \right)^2 \sigma_r, \quad (1a)$$

² Vgl. die Zitate in I.

* (16) Marburg, Wilhelm-Roser-Str. 33a.

¹ S. Flügge, Z. Naturforschg. 1, 121 [1946]. Im folgenden als I bezeichnet.



so daß bei bekannter Resonanzenergie E_r und Höhe des Resonanzmaximums σ_r aus einer Messung des thermischen Einfangquerschnitts die Linienbreite Γ erschlossen werden kann. Dieses Verfahren lag für die Auswertung der älteren Messungen nach der Selbstabsorptionsmethode und Bor-Methode stets nahe, da diese Methode wohl über E_r und σ_r , aber nicht über Γ Aufschluß gibt. Die Schlußweise ist aber unstatthaft, weil auf den Querschnitt σ_{th} auch die höheren Resonanzniveaus Einfluß haben. Überlagert man einfach die Querschnitte der einzelnen Niveaus:

$$\sigma = \sum_r \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{\sigma_r \Gamma_r^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma_r^2}, \quad (2)$$

so wird

$$\sigma_{th} = \sum_r \sqrt{\frac{E_r}{E_{th}}} \left(\frac{\Gamma_r}{E_r} \right)^2 \sigma_r, \quad (2a)$$

d. h. die einzelnen Summenglieder nehmen wie $E_r^{-3/2}$ mit wachsender Resonanzenergie ab, weshalb man gelegentlich dazu neigte, die höheren Linien neben der tiefsten zu vernachlässigen. Eine genaue Analyse zeigt nun, daß die Formel (2) nicht die richtige Verallgemeinerung von (1) ist, sondern daß bei mehreren Niveaus eine Art *Interferenz* der einzelnen Streuquerschnitte eintritt, wie im folgenden gezeigt werden wird.

Es sei noch angemerkt, daß die neue amerikanische Methode der Ausmessung von Resonanzlinien mit Hilfe einer modulierten Quelle langsamer Neutronen das alte experimentelle Problem gegenstandslos gemacht hat, da man nunmehr direkt die Form der Resonanzlinien studieren kann³. Doch ergibt sich gerade nun aus der vollständigen Kenntnis des Verlaufs der Wirkungsquerschnittskurve über mehrere Resonanzstellen hinweg das interessante Problem, wie weit solche Interferenzglieder direkt experimentell nachweisbar werden.

Die im folgenden gegebene Herleitung wiederholt teilweise in verallgemeinerter Form Überlegungen aus I, was teils um der Geschlossenheit des Gedankenganges willen, teils um eine Ungenauigkeit bei der Definition der Hamilton-Funktion in I richtigzustellen, notwendig erscheint.

1. Aufstellung der Grundgleichungen

Es gebe eine Reihe von Zuständen des Gesamtsystems, welche nahezu stationär sind. Ein solcher

³ Vgl. z. B. J. Rainwater u. W. H. Havens jr., Physic. Rev. **70**, 136 u. 154 [1946].

Zustand ist z. B. derjenige, bei dem sich ein Neutron außerhalb des Kernes befindet (Eigenfunktion u_0). Der Hamilton-Operator enthält zweifellos Teile, welche Übergänge dieses Zustandes in solche ermöglichen, bei welchen alle Nukleonen im Kerninnern sind; doch ist die Wahrscheinlichkeit solcher Übergänge gering, und die diesbezüglichen Glieder sollen als Störung aufgefaßt werden. Wir können also den Hamilton-Operator zerlegen in $H = H^{(0)} + H^{(1)}$, wobei wir die Eigenzustände von $H^{(0)}$ als bekannt voraussetzen.

Diese Eigenzustände ordnen wir in drei Gruppen:

1. Der *Anfangszustand* u_0 , bei dem sich ein Neutron außerhalb des Kernes befindet. Es soll

$$H^{(0)} u_0 = E_0 u_0$$

sein oder, wenn wir hier und im folgenden stets statt der Energien Frequenzen nach den Beziehungen

$$H^{(0)} = \hbar \Omega^{(0)}, \quad E_0 = \hbar \omega_0$$

einführen:

$$\Omega^{(0)} u_0 = \omega_0 u_0.$$

2. Die *Zwischenzustände*, numeriert durch lateinische Indices m, n :

$$\Omega^{(0)} u_n = \omega_n u_n.$$

3. Die möglichen *Endzustände*, numeriert durch griechische Indices μ, ν :

$$\Omega^{(0)} u_\nu = \omega_\nu u_\nu.$$

Bei Summen über alle drei Gruppen von Zuständen $(0, n, \nu)$ verwenden wir die Buchstaben k und l .

Die Klassifizierung in Zwischen- und Endzustände leitet ihre Berechtigung daher, daß direkte Übergänge zwischen u_0 und den u_ν verboten sind, also

$$H_{0\nu} = \hbar \Omega_{0\nu} = \int d\tau u_\nu^* H^{(1)} u_0 = 0.$$

Außerdem wollen wir auch voraussetzen, daß innerhalb der gleichen Gruppe keine Übergänge vorkommen, d. h.

$$H_{nm} = \hbar \Omega_{nm} = 0, \quad H_{\nu\mu} = \hbar \Omega_{\nu\mu} = 0.$$

Dagegen soll die „Störungsenergie“ $H^{(1)}$ Ursache dafür werden, daß die Matricelemente H_{0n} und $H_{n\nu}$ nicht verschwinden.

Die Eigenlösungen u_0, u_n, u_ν bilden zusammen ein Orthogonalsystem; infolgedessen sind die

Diagonalelemente der Energiematrix $H_{kk} = E_k$ (oder $\Omega_{kk} = \omega_k$) die Energiestufen des Systems.

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\Omega \psi = i \dot{\psi}$$

setzen wir nach der Diracschen Methode in der Form an

$$\psi = \sum_k \alpha_k(t) e^{-i\omega_k t} u_k.$$

Wäre das Störungsglied nicht vorhanden, so wären die α_k Konstanten; infolge der Störung ergibt sich aber beim Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung

$$\sum_k \alpha_k e^{-i\omega_k t} \Omega u_k = i \sum_k (\dot{\alpha}_k - i \omega_k \alpha_k) e^{-i\omega_k t} u_k,$$

und bei Anwendung der Operation $\int d\tau u_l^* \dots$

$$i \dot{\alpha}_l = \sum_k' \alpha_k e^{-i(\omega_k - \omega_l)t} \Omega_{kl}.$$

Diese Gleichungen für verschiedene l teilen wir jetzt auf, entsprechend den drei Gruppen von möglichen Zuständen. Dann erhalten wir als Grundgleichungen für alle weiteren Betrachtungen:

$$i \dot{\alpha}_0 = \sum_n \alpha_n e^{-i(\omega_n - \omega_0)t} \Omega_{n0}, \quad (3a)$$

$$i \dot{\alpha}_n = \alpha_0 e^{-i(\omega_0 - \omega_n)t} \Omega_{0n} + \sum_v \alpha_v e^{-i(\omega_v - \omega_n)t} \Omega_{vn}, \quad (3b)$$

$$i \dot{\alpha}_v = \sum_n \alpha_n e^{-i(\omega_n - \omega_v)t} \Omega_{nv}. \quad (3c)$$

2. Lösung der Grundgleichungen, allgemeiner Teil

Wir versuchen die Lösung der Gleichungen durch den Ansatz

$$\alpha_0 = e^{-\gamma t}, \quad \alpha_n = \beta_n e^{-i(\omega_0 - \omega_n)t - \gamma t} \quad (4)$$

für große t . Für $t = 0$ erfüllt dieser Ansatz hinsichtlich der α_n nicht die Anfangsbedingung $\alpha_n(0) = 0$. Er entspricht vielmehr dem folgenden Problem: In einem großen Volumen sind eine Menge Kerne und freie Neutronen eingeschlossen. Diese Neutronen werden fortwährend weggefangen, d. h. sie gehen über irgendwelche Zwischenzustände zu irgendwelchen Endzuständen über.

Nach Ablauf einiger Zeit bildet sich ein laufendes Gleichgewicht innerhalb der Reihe der Zustände aus, d. h. alle Zwischenzustände nehmen mit der gleichen Halbwertszeit wie der Anfangszustand ab. Eben diese zeitliche Abnahme, welche durch γ gegeben ist, bestimmt die Einfangwahrscheinlichkeit und damit den Einfangquerschnitt.

Gehen wir mit dem Ansatz (4) in (3c) ein, so entsteht zunächst

$$i \dot{\alpha}_v = \sum_n \beta_n e^{-i(\omega_0 - \omega_v)t - \gamma t} \Omega_{nv},$$

also durch Integration mit der Anfangsbedingung $\alpha_v(0) = 0$

$$\alpha_v = \sum_n \Omega_{nv} \beta_n \frac{e^{-i(\omega_0 - \omega_v)t - \gamma t} - 1}{\omega_0 - \omega_v - i\gamma}.$$

Hiermit gehen wir in (3b) ein; dann wird

$$\begin{aligned} & \beta_n (\omega_0 - \omega_n - i\gamma) \\ &= \Omega_{0n} + \sum_v \sum_m \beta_m \Omega_{mv} \Omega_{vn} \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega_v - i\gamma)t}}{\omega_0 - \omega_v - i\gamma}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Beziehung kann die Summe über die Endzustände (v) in bekannter Weise ausgeführt werden nach dem Schema:

$$\begin{aligned} & \sum_v f_v \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega_v - i\gamma)t}}{\omega_0 - \omega_v - i\gamma} \\ &= \frac{\bar{f}_v}{\Delta\omega_v} \int d\omega \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega - i\gamma)t}}{\omega_0 - \omega - i\gamma} = i\pi \frac{\bar{f}_v}{\Delta\omega_v}. \end{aligned}$$

Es verschwindet dann die scheinbare Zeitabhängigkeit und entsteht

$$\beta_n (\omega_0 - \omega_n - i\gamma) = \Omega_{0n} + \sum_m \beta_m \overline{\Omega_{mv} \Omega_{vn}} \frac{i\pi}{\Delta\omega_v}.$$

Wir bezeichnen in der Folge die Größen

$$\frac{\pi}{\Delta\omega_v} \overline{\Omega_{mv} \Omega_{vn}} = p_{nm}. \quad (5)$$

An Stelle der Gln. (3a) und (3b) tritt nunmehr das folgende, stark vereinfachte und zeitunabhängige System

$$-i\gamma = \sum_n \beta_n \Omega_{n0},$$

$$\beta_n (\omega_0 - \omega_n - i\gamma) = \Omega_{0n} - i \sum_m \beta_m p_{nm},$$

oder

$$\beta_n (\omega_0 - \omega_n - i\gamma + i p_{nn}) + i \sum_m' p_{nm} \beta_m - \Omega_{0n} = 0,$$

$$\sum_n \Omega_{n0} \beta_n + i\gamma = 0.$$

Existieren im ganzen N Zwischenzustände, so ist das also ein System von $(N+1)$ inhomogenen Gleichungen für die N Unbekannten β_n ($n=1, 2, \dots, N$). Die Lösbarkeitsbedingung ist das Verschwinden der Determinante, d. h.

$$\begin{vmatrix} i\gamma & \Omega_{10} & \Omega_{20} & \Omega_{30} & \dots & \Omega_{N0} \\ -\Omega_{01} & \omega_0 - \omega_1 + i p_{11} - i\gamma & i p_{12} & i p_{13} & \dots & i p_{1N} \\ -\Omega_{02} & i p_{21} & \omega_0 - \omega_2 + i p_{22} - i\gamma & i p_{23} & \dots & i p_{2N} \\ -\Omega_{03} & i p_{31} & i p_{32} & \omega_0 - \omega_3 + i p_{33} - i\gamma & \dots & i p_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Omega_{0N} & i p_{N1} & i p_{N2} & i p_{N3} & \dots & \omega_0 - \omega_N + i p_{NN} - i\gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Dies ist eine Gleichung $(N+1)$ -ten Grades zur Bestimmung von γ . Sie ist i. a. natürlich sehr kompliziert, obwohl wegen der Kleinheit von γ (vgl. I; γ ist umgekehrt proportional dem Normierungsvolumen) nur das absolute und das in γ lineare Glied berücksichtigt werden muß.

Aus dem Realteil von γ erhält man alsdann den Wirkungsquerschnitt nach der Formel

$$\sigma = 2 \frac{V}{v_0} \operatorname{Re} \gamma. \quad (7)$$

Wir betrachten im folgenden einige einfache Sonderfälle.

3. Lösung für ein und zwei Niveaus

Wenn die Zahl der möglichen Zwischenzustände, d. h. der Resonanzniveaus, $N=1$ ist, so entsteht

$$\begin{vmatrix} i\gamma & \Omega_{10} \\ -\Omega_{01} & \omega_0 - \omega_1 + i p_{11} - i\gamma \\ -\Omega_{02} & i p_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

Berücksichtigt man, daß Ω_{01}, Ω_{02} ebenso wie γ aus Normierungsgründen beliebig klein werden, und daß

$$p_{12} p_{21} - p_{11} p_{22} = 0 \quad (9)$$

ist, so erhalten wir

$$\operatorname{Re} \gamma = \frac{p_{11} |\Omega_{01}|^2 \omega_2^2 + p_{22} |\Omega_{02}|^2 \omega_1^2 + 2 \zeta \omega_{01} \omega_{02}}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + (p_{11} \omega_{02} + p_{22} \omega_{01})^2}, \quad (10)$$

wobei

$$2 \zeta = \Omega_{10} \Omega_{02} p_{12} + \Omega_{20} \Omega_{01} p_{21} \quad (11)$$

reell ist, und die Abkürzungen

$$\omega_{01} = \omega_0 - \omega_1, \quad \omega_{02} = \omega_0 - \omega_2$$

bedeuten.

die bekannte Breit-Wigner-Formel als einfachster Sonderfall. Es wird dann aus der Determinante (6):

$$\begin{vmatrix} i\gamma & \Omega_{10} \\ -\Omega_{01} & \omega_0 - \omega_1 + i p_{11} - i\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Löst man diese Beziehung nach γ auf und trennt Realteil und Imaginärteil, so entsteht nach einfacher Umrechnung:

$$\operatorname{Re} \gamma = \frac{p_{11} |\Omega_{01}|^2}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + p_{11}^2}. \quad (8)$$

Der Vergleich mit I, Gl. (24), läßt hierin unschwer die Breit-Wigner-Formel erkennen.

Für zwei Niveaus nimmt die Bestimmungsgleichung für γ folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{20} & \\ i p_{12} & \\ \omega_0 - \omega_2 + i p_{22} - i\gamma & \end{vmatrix} = 0.$$

Zur näheren Diskussion von (10) schreiben wir für die komplexen Matrixelemente

$$\Omega_{01} = A e^{i\alpha}, \quad \Omega_{02} = B e^{i\beta}, \quad p_{12} = a e^{i\varphi}.$$

Durch Vertauschung der Indices entsteht bei den vorgenannten drei Größen jeweils das konjugiert Komplexe. Ferner werden die Größen

$$I_1 = \hbar p_{11}, \quad I_2 = \hbar p_{22}$$

reell und positiv, und aus (11) ergibt sich

$$\zeta = A B a \cos(\varphi + \beta - \alpha).$$

Nun ist aber nach Gl. (9) auch $p_{11} p_{22} = |p_{12}|^2 = a^2$,

daher

$$\zeta = \sqrt{p_{11} A^2} \sqrt{p_{22} B^2} \cos(\varphi + \beta - \alpha).$$

Wir wollen kurz die Summe der Phasenwinkel $\varphi + \beta - \alpha = \chi$ und den Quotienten

$$\frac{p_{22} |\Omega_{02}|^2}{p_{11} |\Omega_{01}|^2} = \frac{p_{22} B^2}{p_{11} A^2} = R^2$$

setzen, dann geht (10) über in

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\sigma_1 I_1^2 \sqrt{E_1} E_{02}^2 + \sigma_2 I_2^2 \sqrt{E_2} E_{01}^2 + 2 \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} I_1 I_2 \sqrt{E_1 E_2} \cos \chi E_{01} E_{02}}{E_{01}^2 E_{02}^2 + (I_1 E_{02} + I_2 E_{01})^2}. \quad (12)$$

Diese Formel enthält die vollständige Lösung für zwei Niveaus, ausgedrückt durch die bekannten, experimentell bequem zugänglichen Größen. Liegen die beiden Linien um den Abstand E_{21} auseinander, der groß gegen die Linienbreiten I_1 und I_2 ist, so wird jede Linie vom Breit-Wigner-Typ, und die Konstanten σ_1 , I_1 , σ_2 , I_2 beschreiben in der üblichen Weise die beiden Linien. Befinden wir uns bei einer Energie E_0 , die klein gegen E_1 und E_2 ist, wie dies i.a. für thermische Energien zutrifft, so wird

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \frac{\sigma_1 I_1^2}{E_1^2} + \sqrt{\frac{E_2}{E_0}} \frac{\sigma_2 I_2^2}{E_2^2} + 2 \cos \chi \frac{(E_1 E_2)^{1/4}}{\sqrt{E_0}} \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} I_1 I_2}{E_1 E_2}, \quad (13)$$

d. h. außer den beiden ersten Summanden, die genau der naiven Addition der Wirkungsquerschnitte zweier Linien im Sinne von Gl. (2a) entsprechen, tritt noch ein *Interferenzglied* auf, das zwar ebenfalls wie $E_0^{-1/2}$ von der Energie abhängt, aber den Absolutwert des thermischen Querschnitts völlig verfälschen kann. Man erhält für $\cos \chi > 0$ eine Vermehrung, für $\cos \chi < 0$ eine Verminderung des thermischen Querschnitts gegen den naiven Wert.

Besonders interessant wird der Fall eines *engen Doublets* von zwei Resonanzlinien gleicher Breite $I_1 = I_2$ und Höhe $\sigma_1 = \sigma_2$. Der Fall wird in Strenge wohl nie auftreten, zeigt aber in seiner Einfachheit so wesentlich neue Züge, daß wir ihn hier näher behandeln wollen. Die Gl. (12) geht dann über in

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \sigma_1 I_1^2 \frac{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \cos \chi E_{01} E_{02}}{E_{01}^2 E_{02}^2 + I_1^2 (E_{01} + E_{02})^2}, \quad (14)$$

und im Grenzfall $E_0 \ll E_1$ entsteht:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \frac{\sigma_1 I_1^2}{E_1^2} 2(1 + \cos \chi), \quad (15)$$

was für $\cos \chi = 0$ wieder in die naive Formel nach (2a) übergeht. Man kann also im thermischen Bereich maximal (für $\chi = 0$) das Doppelte, mini-

$$\text{Re } \gamma = \frac{\omega_{02}^2 + R^2 \omega_{01}^2 + 2 R \cos \chi \omega_{01} \omega_{02}}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + (p_{11} \omega_{02} + p_{22} \omega_{01})^2} I_1 |\Omega_{01}|^2.$$

Den Wirkungsquerschnitt erhalten wir hieraus nach (7). Bezeichnen wir den Wert von σ an der Stelle $\omega_0 = \omega_1$ mit σ_1 , und an der Stelle $\omega_0 = \omega_2$ mit σ_2 , so geht dieser Ausdruck schließlich, wenn wir auch noch von der Frequenzskala zur Energieskala zurückkehren, über in

mal (für $\chi = \pi$) sogar $\sigma = 0$ erhalten. In diesem Sinne mag sich vielleicht der auffallend kleine thermische Einfangquerschnitt mancher schweren Kerne, z. B. von Blei und Wismut, erklären lassen, die doch sicher auch Resonanzlinien besitzen.

Um Gl. (14) auch in der Umgebung der beiden Resonanzstellen zu studieren, ist es bequem, die Energieskala durch Einführung der neuen Variablen

$$\varepsilon = \frac{E_0 - E_1}{E_2 - E_1} \quad (16)$$

so zu verändern, daß die Resonanzen an die Stellen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ fallen. Ist dann noch

$$q = \frac{I}{E_2 - E_1}, \quad (17)$$

so wird im Resonanzgebiet

$$\sigma = \sigma_1 q^2 \frac{(\varepsilon - 1)^2 + \varepsilon^2 + 2 \varepsilon (\varepsilon - 1) \cos \chi}{\varepsilon^2 (\varepsilon - 1)^2 + q^2 (2 \varepsilon - 1)^2}. \quad (18)$$

In der Mitte zwischen beiden Linien, d. h. an der Stelle $\varepsilon = 1/2$, wird

$$\sigma = \sigma_1 q^2 \frac{\frac{1}{2} (1 - \cos \chi)}{1/16} = 16 \sigma_1 q^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}. \quad (19)$$

Aus der einfachen Überlagerung zweier Breit-Wigner-Formeln würde sich dagegen ergeben

$$\bar{\sigma} = 2 \sigma_1 \frac{q^2}{\frac{1}{4} + q^2}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $\chi = 0$, d. h. eben dann, wenn sich im thermischen Bereich die beiden Linien durch Interferenz verstärken. Da-

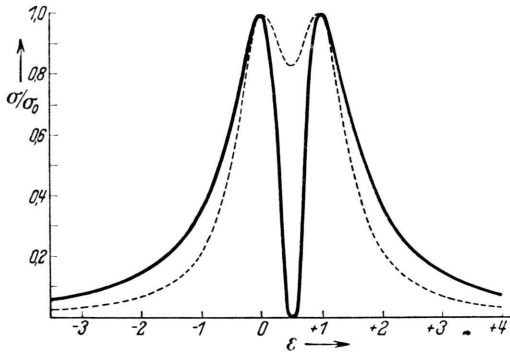


Abb. 1. Dublett mit $q = 1/2$. Ausgezogen: Mit Interferenz ($\chi = 0$). Gestrichelt: Ohne Interferenz.

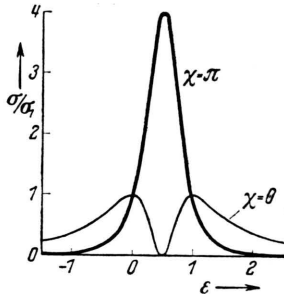


Abb. 2. Verschiedene Dublettformen für $\chi = 0$ und $\chi = \pi$, bei $q = 1/2$.

gegen entsteht für $\chi = \pi$ ein Maximum der Größe $\bar{\sigma} = 16 \sigma_1 q^2$. Den ersten Fall veranschaulicht Abb. 1, in der für $q = 1/2$ neben der gestrichelt eingetragenen, naiven Summe der beiden Breit-Wigner-Querschnitte mit ihrer nur geringen Einsattelung zwischen den beiden gerade noch deutlich sichtbaren Maxima die ausgezogene Kurve den aus Gl. (18) mit $\chi = \pi$ berechneten Verlauf angibt. Man sieht, daß der tiefe Einschnitt nicht nur die beiden Linien viel deutlicher trennt, als dies nach der naiven Theorie erreicht würde, sondern daß nach außen hin der Abfall der Wirkungsquerschnitte in den Linienflügeln viel langsamer erfolgt als bisher. Beobachtet ist ein solches Dublett bisher meines Wissens nicht; es wäre

jedoch interessant, weil es den Interferenzeffekt sehr drastisch zeigt.

Der umgekehrte Fall ($\chi = \pi$) scheint mir fast noch interessanter. Das ganze Liniengebirge erhält dann wieder das Aussehen einer einheitlichen, um den Faktor $16 q^2$ überhöhten Linie (vgl. Abb. 2). Ihre Form ist jedoch alles andere als vom Breit-Wigner-Typ. Für $|\epsilon| \gg 1$ geht Gl. (18) über in

$$\sigma = \sigma_1 q^2 \frac{2 \epsilon^2 (1 + \cos \chi) - 2 \epsilon (1 + \cos \chi) + 1}{\epsilon^4},$$

d. h. für $\chi \neq \pi$ entstehen beiderseits Linienflügel vom Breit-Wigner-Typ:

$$\sigma = \sigma_1 q^2 \frac{4 \cos^2 \chi/2}{\epsilon^2};$$

dagegen für $\chi = \pi$ durch Interferenz ein Abfall wie ϵ^{-4} . Natürlich wird i. a. nicht so exakt $\chi = \pi$ gelten, daß das langsam abfallende Breit-Wignersche Verhalten nicht doch noch spürbar würde; es kann jedoch im Absolutwert sehr stark herabgesetzt werden.

Die Halbwertsbreite des ganzen Gebirges, aufgefaßt als scheinbar einheitliche Linie, ergibt sich aus $\sigma = \frac{1}{2} \bar{\sigma}$; das tritt ein für $\chi = \pi$ bei den Energien

$$\left(\epsilon - \frac{1}{2}\right)^2 = -2 q^2 + \frac{1}{4} + \sqrt{4 q^4 - q^2 + \frac{1}{8}}.$$

Ist $q \gg 1$, d. h. der Dublett Abstand $\Delta E = E_2 - E_1 \ll \Gamma_1$, so erhält man hieraus genähert

$$\epsilon - \frac{1}{2} \approx \pm \frac{1}{8 q}, \quad (20)$$

oder, in üblichen Einheiten ausgedrückt: Es entsteht eine scheinbar einheitliche Linie mit dem Maximum in der Mitte zwischen E_1 und E_2 . Der Wirkungsquerschnitt im Maximum wird nach Gl. (19)

$$\sigma_{\text{eff}} = 16 \left(\frac{\Gamma_1}{\Delta E}\right)^2 \sigma_1,$$

ist also beträchtlich überhöht, und die effektive Linienbreite wird nach Gl. (20)

$$\Gamma_{\text{eff}} = \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta E}{\Gamma_1}\right)^2 \Gamma_1,$$

also viel schmäler als die der Einzelkomponenten.

Das zuletzt geschilderte Verhalten erinnert so sehr an die von Sauerwein⁴ ausgemessene Resonanzlinie des Urans bei $E_1 = 7,5 \text{ eV}$, deren Linienbreite auf weniger als $1/100 \text{ eV}$ geschätzt wurde und deren Höhe in der Größenordnung von $40000 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ liegen soll, während doch sonst die üblichen Zahlenwerte von anderen Atomkernen in der Gegend einiger Zehntel eV für die Linienbreite und um $5000 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ für die maximale Absorption liegen, daß sich der Verdacht schwer abweisen läßt, hier ein verkapptes Dublett ähnlicher Struktur bereits seit Jahren beobachtet zu haben. Eine sichere quantitative Aussage läßt sich aus den noch nach älteren experimentellen Methoden (Selbstabsorption) von Sauerwein durchgeführten Messungen kaum machen. Bei Anwendung der modernen amerikanischen Verfahren (modulierte Neutronenquelle, Kristallspektrometer) muß eine Entscheidung aber möglich sein. Wenn nämlich ein solches enges Dublett vorliegt, dann ist es sicher sehr unwahrscheinlich, daß beide Komponenten exakt die gleichen Konstanten haben, so daß eine Unsymmetrie der resultierenden Linie sehr wahrscheinlich wäre.

Die Messungen von Rainwater und Havens³ deuten übrigens noch an anderer Stelle auf ein Interferenzphänomen hin. Diese Autoren geben nämlich für Silber insgesamt drei Niveaus mit den in Tab. 1 enthaltenen Bestimmungsstücken an.

Nach der naiven Formel (2a), in welcher alle Interferenzerscheinungen vernachlässigt sind, erhält man den thermischen Einfangquerschnitt, in-

E_r	$\sigma_r I_r^2$	$\sigma_r I_r^2 / E_r^{3/2}$
eV	$10^{-24} \text{ cm}^2 \text{ eV}^2$	
5,1	300	26
13,7	14	0,3
43	380	1,4

Tab. 1.

dem man die Zahlen der letzten Spalte addiert und durch $\sqrt{E_0}$ dividiert. Sollten noch mehrere Niveaus darüber hinaus bestehen, die von der Messung bisher nicht erfaßt wurden, dann muß der auf diese Weise berechnete Einfangquerschnitt im thermischen Bereich noch größer werden, also auf jeden Fall nicht kleiner als $27,7/\sqrt{E_0}$. Beobachtet wurde aber nur $1/3$ dieses Wertes, nämlich $9,05/\sqrt{E_0}$, was wohl nur als teilweise Interferenzauslöschung des Einfangquerschnitts gedeutet werden kann.

4. Ein einfacher Sonderfall mit vielen Niveaus

Da die Entwicklung der Determinante (6) mit wachsender Zahl der Niveaus immer komplizierter wird, wollen wir uns für die Diskussion vieler Niveaus den einfachsten Fall aussuchen, daß alle Matrixelemente $\Omega_k^0 = \Omega$ und alle Linienbreiten $p_{kk} = p$ einander gleich werden, und daß darüber hinaus auch alle gemischten Glieder $p_{ik} = p$ werden, was bis auf Phasenfaktoren aus Gl. (5) gefolgert werden kann. Dann geht die Säkulargleichung (6) über in

$$\begin{vmatrix} i\gamma & \Omega & \Omega & \dots & \Omega \\ -\Omega^* & \omega_{01} + ip - i\gamma & ip & \dots & ip \\ -\Omega^* & ip & \omega_{02} + ip - i\gamma & \dots & ip \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Omega^* & ip & ip & \dots & \omega_{0N} + ip - i\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Wir entwickeln die Determinante folgendermaßen: Wir lassen die erste und zweite Zeile unverändert, ziehen aber von allen folgenden die zweite Zeile ab. Dann entsteht:

$$\begin{vmatrix} i\gamma & \Omega & \Omega & \Omega & \dots & \Omega \\ -\Omega^* & \omega_{01} + ip - i\gamma & ip & ip & \dots & ip \\ 0 & -\omega_{01} + i\gamma & \omega_{02} - i\gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_{01} + i\gamma & 0 & \omega_{03} - i\gamma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\omega_{01} + i\gamma & 0 & 0 & \dots & \omega_{0N} - i\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

⁴ K. Sauerwein, Z. Naturforschg. 2a, 73 [1947].

Entwickeln wir nun nach der ersten Zeile, so erhalten wir mit der Abkürzung $a_n = \omega_{0n} - i\gamma$:

$$i\gamma \begin{vmatrix} a_1 + ip & ip & ip & \dots & ip \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_N \end{vmatrix} + |\Omega|^2 [a_2 a_3 a_4 \dots a_N + a_1 a_3 a_4 \dots a_N + a_1 a_2 a_4 \dots a_N \dots] = 0.$$

Die Entwicklung der ersten Unterdeterminante nach der ersten Zeile führt auf

$$(a_1 + ip) a_2 a_3 a_4 \dots a_N - ip (-a_1) a_3 a_4 \dots a_N + ip (-a_1) (-a_2) a_4 \dots a_N \dots \\ = \Pi a_n + ip \Pi a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_N} \right) = \Pi a_n \left\{ 1 + ip \sum \frac{1}{a_n} \right\}.$$

Daher wird die Säkulargleichung

$$i\gamma \Pi a_n \left\{ 1 + ip \sum \frac{1}{a_n} \right\} + |\Omega|^2 \Pi a_n \sum \frac{1}{a_n} = 0,$$

oder

$$\gamma = \frac{i |\Omega|^2 \sum \frac{1}{a_n}}{1 + ip \sum \frac{1}{a_n}}.$$

Da nun $\gamma \ll \omega_{0n}$ und zwar beliebig klein mit wachsendem Normierungsvolumen wird, können wir $a_n = \omega_{0n}$ setzen. Dann wird

$$\text{Re } \gamma = \frac{|\Omega|^2 p \left(\sum_n \frac{1}{\omega_0 - \omega_n} \right)^2}{1 + p^2 \left(\sum_n \frac{1}{\omega_0 - \omega_n} \right)^2}. \quad (21)$$

Diese Formel wird in der Umgebung einer Resonanzstelle, z.B. für $\omega_0 \approx \omega_k$, mit der Breit-Wigner-Formel für ein Niveau identisch, da dann

$$\sum_n \frac{1}{\omega_0 - \omega_n} \approx \frac{1}{\omega_0 - \omega_k}$$

wird, und daher

$$\text{Re } \gamma \approx \frac{|\Omega|^2 p}{(\omega_0 - \omega_k)^2 + p^2}.$$

Schreiben wir Gl. (21) auf Wirkungsquerschnitte um, so erhalten wir

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \sigma_1 \frac{\left(\sum_n \frac{\Gamma}{E_0 - E_n} \right)^2}{1 + \left(\sum_n \frac{\Gamma}{E_0 - E_n} \right)^2}. \quad (22)$$

Die Folge der Maxima σ_n wird also $\sigma_n = \sqrt{E_1/E_n} \sigma_1$, nimmt also mit wachsender Energie langsam ab. Das liegt natürlich an der speziellen Wahl der Konstanten. Wird der Abstand der Niveaus voneinander klein gegen die Linienbreite Γ der einzelnen Niveaus, so wird die im Zähler und Nenner von (22) auftretende Summe $\gg 1$, so daß (22) übergeht in

$$\sigma = \sqrt{E_1/E_0} \sigma_1,$$

d.h. alle Resonanzerscheinungen verschwinden. Dies ist natürlich nichts Neues, sondern das seit langem bekannte Verhalten, das sich beim Übergang zu hohen Energien stets einstellen muß.

Andererseits ergibt Gl. (22) für eine Neutronenenergie E_0 , welche klein ist gegen alle Resonanzenergien, also z.B. für thermische Neutronen, daß die Summe $\ll 1$ wird, so daß

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \sigma_1 \left(\sum_n \frac{\Gamma}{E_n} \right)^2$$

entsteht, zum Unterschied von der naiven Überlagerung einzelner Breit-Wigner-Linien nach Gl. (2a), was auf

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} \sigma_1 \sum_n \left(\frac{\Gamma}{E_n} \right)^2$$

geführt hätte.